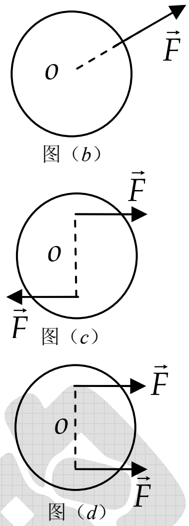
刚体定轴转动　转动定律



（第 1 题图）

1. （a）平行于转轴的力不会引起转动效果，所以平行于转轴的力对转轴的力矩一定为零。
（b）垂直于转轴的力，如果力的作用线经过转轴，即力臂为零，力矩为零，如图（b）。
（c）如果两个力的大小相等，方向相反，但不在同一直线上，如图（c），合力为零，但合力矩不为零。
（d）合力矩为零时，合力不一定为零，例如图（d）。　　　**本题选（B）**

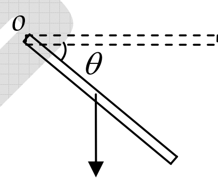
2. 细圆环上各质点到中心转轴的距离都相等，为圆环半径。由转动惯量的定义：

$$J=\sum_i \Delta m_i r_i^2=\sum_i \Delta m_i R^2=R^2\sum_i \Delta m_i = MR^2,$$　　　本题选（**C**）

可见，细圆环的转动惯量与圆环的半径和质量有关，与质量在圆环上的分布是否均匀无关。

3. 棒下摆过程中，只受重力矩的作用。当棒下摆到角度θ时，重力矩：$\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{g}$，

力矩大小：$M=\dfrac{l}{2}mg\sin(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\dfrac{l}{2}mg\cos\theta$，方向垂直纸面向里。



（第 3 题图）

由转动定律：$M=J\alpha \;\Rightarrow\; \dfrac{l}{2}mg\cos\theta=\dfrac{1}{3}ml^2\alpha \;\Rightarrow\; \alpha=\dfrac{3g}{2l}\cos\theta$，

棒下摆过程中，角度θ增大，$\cos\theta$减小，所以角加速度α从大到小；

由$\alpha=\dfrac{d\omega}{dt} \;\Rightarrow\; \dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{3g}{2l}\cos\theta \;\Rightarrow\; \dfrac{d\omega}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{3g}{2l}\cos\theta \;\Rightarrow\; \omega\dfrac{d\omega}{d\theta}=\dfrac{3g}{2l}\cos\theta$

$$\Rightarrow\; \omega d\omega=\frac{3g}{2l}\cos\theta\, d\theta \;\Rightarrow\; \int_0^{\omega}\omega d\omega=\int_0^{\theta}\frac{3g}{2l}\cos\theta\, d\theta \;\Rightarrow\; \omega=\sqrt{\frac{3g}{l}\sin\theta},$$

棒下摆过程中，角度θ增大，$\sin\theta$随之增大，所以角速度ω从小到大。　　本题选（**D**）

4. 电唱机转速$n=78\,\mathrm{rev/min} \;\Rightarrow$ 角速度：$\omega=\dfrac{78\times 2\pi}{60}=2.6\pi\,\mathrm{rad/s}$，

$\Rightarrow$ **P** 点的线速度大小：$v=r\omega=0.15\mathrm{m}\times 2.6\pi\,\mathrm{rad/s}=0.39\pi\,\mathrm{m/s}=1.22\,\mathrm{m/s}$，

$\Rightarrow$ 法向加速度：$a_n=\dfrac{v^2}{r}=r\omega^2=1.014\pi^2\,\mathrm{m/s^2}=9.998\,\mathrm{m/s^2}$；

转盘受到恒定的阻力矩：$M=J\alpha \;\Rightarrow$ 角加速度α为常数，转盘做匀变速转动，由$\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}$，

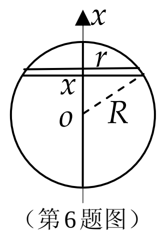
$\Rightarrow\; \int_{\omega}^{0}d\omega=\int_0^t\alpha\, dt \;\Rightarrow\; -\omega=\alpha t \;\Rightarrow$ 角加速度：$\alpha=-\dfrac{\omega}{t}=-0.173\pi\,\mathrm{rad/s^2}$；（负号表示方向）

又由$\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d\omega}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \;\Rightarrow\; \alpha=\omega\dfrac{d\omega}{d\theta} \;\Rightarrow\; \int_{\omega}^{0}\omega d\omega=\int_0^{\theta}\alpha\, d\theta \;\Rightarrow\; -\omega^2=2\alpha\theta \;\Rightarrow\; \theta=-\dfrac{\omega^2}{2\alpha}=\dfrac{\omega}{2}t$，

转过的圈数：$N=\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{\omega}{4\pi}t=9.75$.

5. 由转动定律：$M=J\alpha \;\Rightarrow\; -k\omega=J\dfrac{d\omega}{dt} \;\Rightarrow\; dt=-\dfrac{J}{k}\dfrac{d\omega}{\omega} \;\Rightarrow\; \int_0^t dt=\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}}-\dfrac{J}{k}\dfrac{d\omega}{\omega}$，

$\Rightarrow$ 角速度降至一半所需的时间：$t=-\dfrac{J}{k}\ln\dfrac{1}{2}=\dfrac{J}{k}\ln 2$.



（第6题图）

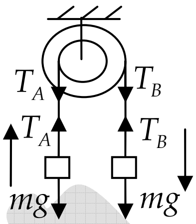
6. 如图，沿轴线方向建立ox轴，坐标原点o在球心处，球体的质量体密度$\rho=m\Big/(\dfrac{4}{3}\pi R^3)$；

把球体切割成大量薄圆盘，在任一位置x处取一厚度为dx，半径为$r=\sqrt{R^2-x^2}$ 的圆盘，

薄圆盘的质量为：$dm=\rho(\pi r^2 dx)$，对 ox 轴的转动惯量为：$dJ=\dfrac{1}{2}(dm)r^2=\dfrac{1}{2}\rho\pi(R^2-x^2)^2dx$，

$\Rightarrow$ **整个球体对 ox 轴的转动惯量为：** $J=\int dJ=\int_{-R}^{R}\dfrac{1}{2}\rho\pi(R^2-x^2)^2dx=\dfrac{1}{2}\rho\pi(2R^5-\dfrac{4}{3}R^5+\dfrac{2}{5}R^5)=\dfrac{2}{5}mR^2$.

7. 设左右两侧轻绳中张力大小分别为 T_A 和 T_B，物体 A 上升的加速度大小为 a_A，物体 B 下落的加速度大小 a_B，分别以物体 A、B 以及定滑轮为研究对象：



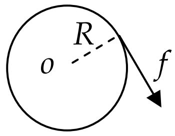
（第 7 题图）

$$\begin{cases}T_A-mg=ma_A\\ mg-T_B=ma_B\\ RT_B-rT_A=J\alpha\\ a_B=R\alpha\\ a_A=r\alpha\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha=\dfrac{mg(R-r)}{J+mR^2+mr^2}\\ a_A=\dfrac{mgr(R-r)}{J+mR^2+mr^2}\\ a_B=\dfrac{mgR(R-r)}{J+mR^2+mr^2}\end{cases}.$$

8. 匀质细棒的质量线密度 $\lambda=\dfrac{m}{L}$，在细棒上任一位置 x 处取一小段 dx，则这一小段的质量为 $dm=\lambda dx$，受到摩擦力的大小 $df=\mu dmg=\mu\lambda gdx$，摩擦力矩 $dM=-x(\mu\lambda gdx)$，（负号表示方向）

$\Rightarrow$ **细棒受到的摩擦力矩：** $M=\int_0^L -x(\mu\dfrac{m}{L}dxg)=-\dfrac{1}{2}\mu mgL$，**摩擦力矩的大小：** $M=\dfrac{1}{2}\mu mgL$.

9. 圆环逆时针旋转，**角速度 ω 方向沿转轴向上，则取沿转轴向上为正方向。**



（第 9 题图）

（1）在圆环上任取一质元，质量为 dm，重力为 $dm\,g$，

桌面对它的支持力 $N=dm\,g$，它受到的摩擦力为 $f=\mu dm\,g$，

这一小段受到的摩擦力矩：$dM=-R\,f=-R\mu dm\,g$，**负号表示力矩沿转轴向下。**

整个圆环受到的摩擦力矩： $M=\int dM=\int -R\mu dm\,g=-R\mu g\int dm=-\mu mgR$；

（2）由转动定律：$M=J\alpha\ \Rightarrow\ -\mu mgR=mR^2\dfrac{d\omega}{dt}\ \Rightarrow\ -\mu g=R\dfrac{d\omega}{dt}\ \Rightarrow\ dt=-\dfrac{R}{\mu g}d\omega$，

初始时刻 $t=0$ 时，角速度为 ω_0；设经过时间 t 停止转动，角速度 $\omega=0$，

$\int_0^t dt=\int_{\omega_0}^{0}-\dfrac{R}{\mu g}d\omega\ \Rightarrow$ **停止转动所需时间：** $t=\dfrac{R\omega_0}{\mu g}$.

